

33-0147/001

Zur Bestimmung der Knicklängen von verschieblichen
Stockwerkrahmen aus Stahlbeton

Kordina/Jankó

Juni 1972

BIBLIOTHEK
Institut für Brand- und Explosionsschutz
der Technischen Universität Braunschweig
D-3300 Braunschweig

1. Einführung

Der Nachweis der Stabilität von Stahlbetonrahmen kann näherungsweise mit Hilfe des Ersatzstabverfahrens, das auch in die DIN 1045, neu, Eingang fand, durchgeführt werden. Die hierfür benötigten Ersatzlängen für Druckstäbe (Knicklängen) dürfen nach der Elastizitätstheorie bestimmt werden (Abs. 17.4.2). Die strenge Bestimmung der Knicklängen führt zu einer Eigenwertaufgabe, deren Lösung auch bei wenig komplizierten Systemen einen erheblichen Rechenaufwand erfordern kann. Durch Bereitstellung entsprechender Rechenbehelfe - Nomogramm (Tafel 26) nach [1], Formeln nach [2] - lassen sich zwar Näherungswerte der Knicklängen mit wenig Aufwand bestimmen, wobei jedoch die Genauigkeit der Näherung in hohem Maße davon abhängt, ob die der Aufstellung der Behelfe zugrunde gelegte System-Lastanordnung mit den tatsächlichen Verhältnissen hinreichend übereinstimmt. Die Problematik liegt darin, daß es nicht möglich ist, eine Formelsammlung oder graphische Darstellung aufzustellen, die die möglichen praktischen System-Lastanordnungen restlos erfassen könnte. Man ist daher bei Aufstellung solcher Behelfe immer gezwungen, eine Auswahl häufiger Fälle zu treffen, um einfach darstellbare und anwendbare Näherungslösungen für die Knicklösungen zu erhalten. So ist es in der DIN 4114 geschehen und konnte auch bei der Neubearbeitung der betreffenden Abschnitte von DIN 4224 (s. [1]) nicht vermieden werden.

Folglich erscheint es wichtig, den Fehler in der Knicklängenbestimmung nach Näherungsverfahren gegenüber strengeren Lösungen zu kennen. Zu diesem Zweck sollen hier wichtige systemabhängige

Die Koeffizienten in Gl. (1) sind die folgenden:

$$C_1 = \frac{\Sigma^2 - \Sigma \cdot \sin \Sigma}{2(1 - \cos \Sigma) - \Sigma \cdot \sin \Sigma} \cdot \frac{EI}{l} \quad (2)$$

$$C_2 = \frac{\Sigma \cdot \sin \Sigma - \Sigma^2 \cos \Sigma}{2(1 - \cos \Sigma) - \Sigma \cdot \sin \Sigma} \cdot \frac{EI}{l} \quad (3)$$

$$C_3 = \frac{\Sigma^2 (1 - \cos \Sigma)}{2(1 - \cos \Sigma) - \Sigma \cdot \sin \Sigma} \cdot \frac{EI}{l} \quad (4)$$

$$C_4 = -C_3 \quad (5)$$

$$C_5 = 2C_4/l - P/l \quad (6)$$

$$C_6 = 2C_3/l - P/l \quad (7)$$

wobei die Stabkennzahl $\Sigma = l \sqrt{P/EI}$ ist. (8)

Der in Gl. (1) dargestellte Teil der Knickdeterminanten $\sqrt{}$ bezieht sich auf den Rahmenknoten i und auf dessen benachbarten Knoten.

Die Summenglieder der Koeffizienten beziehen sich im Falle Momentengleichgewicht auf vier (Kopfzeiger: 4) und beim Gleichgewicht der Horizontalkräfte auf zwei (Kopfzeiger : 2) benachbarte Stäbe.

Auf eine weitere Indizierung wurde der Übersichtlichkeit wegen verzichtet. Bei Aufstellung der Gl. (1) wurden zunächst - aus re-

chentechnischen Gründen - alle Verschiebungsgrößen (v_i) als unab-

hängige Unbekannte vorausgesetzt. Erst bei der numerischen Auflösung

von Gl. (1) ist die kinematische Bedingung

$$\mathcal{V}_{i-1} = \mathcal{V}_i = \mathcal{V}_{i+1} \quad (9)$$

und damit die horizontale Gleichgewichtsbedingung eines jeden Stockwerkes erfüllt worden.

Die numerische Auflösung der Gl. (1) erfolgte über die Berechnung des Verlaufes der Determinante in Abhängigkeit der Stabkennzahl und Interpolation der ersten Nullstelle. Diese kennzeichnet nämlich die Größe des niedrigsten Eigenwertes, der bekanntlich die System-Knicklast liefert. (In Bild 2 ist der Vorgang dargestellt).

Die so gestaltete Lösung des Eigenwertproblems eignet sich sowohl für die Knicklast- und Knickfigur-Bestimmung als auch für die Berechnung der Eigenfrequenzen und Eigenschwingungsformen für Stockwerkrahmen in viereckigem Raster nach Bild 1. Bei den letzteren Aufgaben sind die Funktionen $F_1 - F_6$ nach Koloušek [4] in die Gl. (2) bis (7) sinngemäß einzusetzen. Im viereckigen Raster lassen sich durch entsprechende Steifigkeitswahl einzelner Stäbe ($I_i \rightarrow 0$ oder $I_i \rightarrow \infty$) auch andere Systemtypen erfassen, z.B. Kragstütze mit mehrfach sprunghaft veränderlichem Querschnitt o.ä.

Die Genauigkeit der numerischen Eigenwertbestimmung ist durch Vergleich mit strengen Lösungen aus der Literatur in einigen speziellen Fällen überprüft worden (Beispiele aus [4], Kragstütze). Die Übereinstimmung war durchweg gut. Die Berechnungen wurden auf der Rechenanlage IBM 1130/16 K des Instituts für Baustoffkunde und Stahlbetonbau in Braunschweig durchgeführt.

3. Rechenergebnisse

Zur Klärung des Einflusses unterschiedlicher Last- und Steifigkeitsverteilungen auf die Systemknicklast von Stockwerkrahmen wurden systematische Untersuchungen verschiedener System-Lastanordnungen durchgeführt, deren Ergebnisse in den Bildern 3a - 8 zusammengefaßt dargestellt wurden. Ergänzend zu den eben geschilderten Untersuchungen ist noch der Einfluß der Anzahl der Stockwerke sowie der Felder von mehrfeldrigen Systemen in den Bildern 9 und 10 nach [5] angegeben. Die Bilder sind auf die Darstellung der Knicklängenbeiwerte ($\beta = S_K/h$) einzelner Stiele bzw. des Gesamtsystems in Abhängigkeit der Knotensteifigkeitszahlen ($k = (\sum I_R/l)/(\sum I_S/h)$) abgestellt.

(10)

Die erzielten Ergebnisse können wie folgt zusammengefaßt werden:

1. Das Knickverhalten einzelner Rahmenstiele wird im wesentlichen von zwei Kenngrößen, nämlich Stabkennzahl (Gl. (8)) und Knotensteifigkeitszahl (Gl. (10)) beeinflusst. Das Nomogramm (Tafel 32) in [1] gilt streng für "Regelsysteme", bei denen sowohl die Stabkennzahlen \sum_i als auch die Knotensteifigkeitszahlen k_i für jeden Druckstab konstant sind. Dies bedeutet, daß jeder Stab im ganzen System den gleichen Ausnutzungsgrad besitzt und den gleichen Knicklängenbeiwert β erhält. Im Hinblick auf seitliche Stabilität kommen gut konstruierte Rahmensysteme diesem Prinzip nahe.
2. Mit Hilfe der Rahmenknicklast läßt sich als Vergleichsgröße eine "Systemknicklänge" in Verbindung mit einem Ersatzquerschnitt (z.B. aus der Bedingung: Biegesteifigkeit des Ersatzquerschnitts = Summe aller Biegesteifigkeiten der Stiele des unteren Geschosses) defi-

nieren. In einem "Regelsystem" stimmt die Systemknicklänge mit den Knicklängen der einzelnen Stiele überein.

3. Für Systeme, die von dem "Regelsystem" - infolge unterschiedlicher Last- und Steifigkeitsverteilungen - abweichen, gelten folgende Feststellungen:

3.1 Die Systemknicklänge ändert sich in einem definierten System nur geringfügig, wenn die Summe der axialen (vertikalen) Stielbelastungen konstant bleibt und nur deren Verteilung auf die einzelnen Stiele sich ändert.

3.2 Die Systemknicklänge ist empfindlich gegenüber der Verteilung der axialen (vertikalen) Stielbelastung im "vertikalen" Sinne. Je höher der Lastschwerpunkt liegt, um so größer wird die Systemknicklänge.

3.3 Veränderungen der Steifigkeitsverteilung der Stiele bei unverändert festgehaltener Gesamtlast und Gesamtstielsteifigkeit beeinflussen die Systemknicklänge; für die Stiele mit vergrößerter Steifigkeit ergeben sich größere Knicklängen als die Systemknicklänge.

3.4 Der Einfluß der Knotensteifigkeitszahl auf die Knicklänge der Stiele nimmt mit zunehmender Größe von k ab. Es läßt sich ein Grenzwert für wirtschaftliche Konstruktionen hinsichtlich der Knickgefahr wie folgt angeben:

$$k \geq 2,0. \quad (11)$$

Systeme, deren Knoten Gl. (11) erfüllen, sind seitlich gut ausgesteift; es bleibt daher der Einfluß der Theorie II. Ordnung auch gering.

4. Für "Regelsysteme" gilt - nach [5] -, daß die Systemknicklänge von der Anzahl der Felder wesentlich, von der Anzahl der Geschosse (bei mehr als 5 Geschossen) nur geringfügig beeinflusst wird.
5. Als Kriterium für die Anwendbarkeit des Nomogrammes ([1], Tafel 26) zur Knicklängenbestimmung wird die Erfüllung folgender Gl. vorgeschlagen.

$$\max \varepsilon_i / \min \varepsilon_i \leq 1,25 \quad (12)$$

(wobei der Fußzeiger i alle Druckstäbe des Systems erfassen muß. Diese Bedingung ist in abgewandelter Form auch in [1] zu finden).

4. Berücksichtigung der beanspruchungsabhängigen Stabsteifigkeiten von Stahlbetonstäben

In den bisherigen Betrachtungen wurde die Gültigkeit des Hookschen Gesetzes für den Baustoff Stahlbeton vorausgesetzt, das bekanntlich nur eine grobe Näherung ist. Diese Annahme erleichtert bzw. ermöglicht in vielen Fällen überhaupt erst die Bestimmung von Ersatzlängen (Knicklängen) für Rahmenstiele. Das wirklichkeitsnahe Stabilitätsverhalten von Stahlbetonstabsystemen kann nur mit Hilfe einer aufwendigen Verformungsrechnung nach Theorie II. Ordnung unter Berücksichtigung des nichtlinear-elastischen Werkstoffgesetzes für Stahlbeton erfaßt werden. Es ist allerdings denkbar, dem wirklichen Stabilitätsverhalten von Stabsystemen etwas näher zu kommen, wenn die beanspruchungsabhängigen mittleren Stabsteifigkeiten (genannt auch: "wirksame Stabsteifigkeiten") in der Nähe der Versagenslast

des Systems abgeschätzt werden können. Eine Möglichkeit hierfür bietet die in [6] entwickelte Formel für prismatische Stäbe mit Rechteckquerschnitt und konstanter symmetrischer Bewehrung.

$$(EI)_W = E_b I_b \left[0,6 - 2(\nu - 0,5)^2 + (1 - 0,25\nu^2)(\rho_{es}\bar{\mu} - 0,05) \right] \quad (13)$$

wobei $(EI)_W$ = "wirksame Stabsteifigkeit"

$E_b I_b$ = Steifigkeit des ungerissenen Betonquerschnitts ohne Einrechnung der Bewehrung

$\rho_{es}\bar{\mu}$ = $\mu \beta_S / \beta_R$ mechanischer Bewehrungsgrad

β_S, β_R = Rechenfestigkeiten für Stahl bzw. Beton

ν = $N / b \cdot d \cdot \beta_R (1 + \rho_{es}\bar{\mu})$ = axialer Belastungsgrad des Stabes

und b, d = Breite und Dicke des Stabquerschnitts

bedeuten.

Die Formel liefert dann gute Näherungswerte für die Stabsteifigkeiten, wenn die den Stab beanspruchende Momentenfläche nach Theorie I. Ordnung wenigstens einen Momentennullpunkt besitzt. Diese Bedingung ist bei der Knicklängenbestimmung verschieblicher Stockwerkrahmen meist erfüllt.

5. Zusammenfassung

Die Anwendung des Ersatzstabverfahrens für den Knicksicherheitsnachweis von Stahlbetonrahmen nach DIN 1045 neu beinhaltet u.a. die Bestimmung der Knicklängen auf elastizitätstheoretischen Grundlagen. Wie empfindlich die Knicklängenbestimmung mit Hilfe von Näherungsverfahren sein kann, wurde durch entsprechende Vergleiche

gezeigt, Kriterien zum Entwurf wenig stabilitätsempfindlicher und daher wirtschaftlicher Stockwerkrahmen-Konstruktionen konnten angegeben werden. Inwieweit das Ersatzstabverfahren selbst für den Stabilitätsnachweis von Rahmensystemen geeignet ist, wird im Rahmen dieser Arbeit nicht behandelt. Eine Näherungsformel zur Abschätzung wirklichkeitsnaher Stabsteifigkeiten ("wirksamer Stabsteifigkeiten") mit konstantem rechteckigem Stabquerschnitt ist ebenso bereitgestellt.

- 1 "Bemessung von Beton- und Stahlbeton-
bauteilen"
Heft 220 des DAfStb, Verlag W. Ernst
& Sohn, Berlin 1972
- 2 DIN 4114
- 3 CHWALLA, E.,
JOKISCH, F. "Über das ebene Knickproblem des
Stockwerkrahmens"
Der Stahlbau, April 1941
- 4 KOLOUŠEK "Baudynamik"
- 5 WAKABAYASHI, M. "The Restoring Force Characteristics
of Multi-Storey Frames"
Bulletin of the Disaster Prevention
Research Institut
Vol. 14, Part 2, February 1965
- 6 JANKÓ, B. "Zum Trag- und Verformungsverhalten
ebener Stockwerkrahmen aus Stahlbeton"
Dissertation TU Braunschweig, 1972

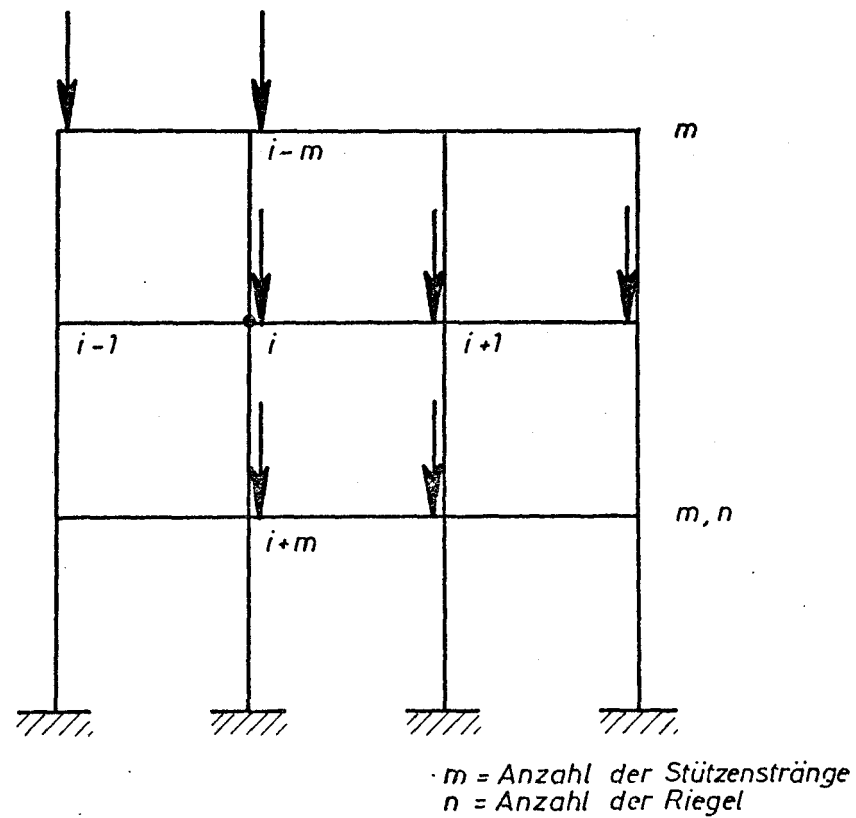


Bild 1 System Lastanordnung und Bezeichnungen

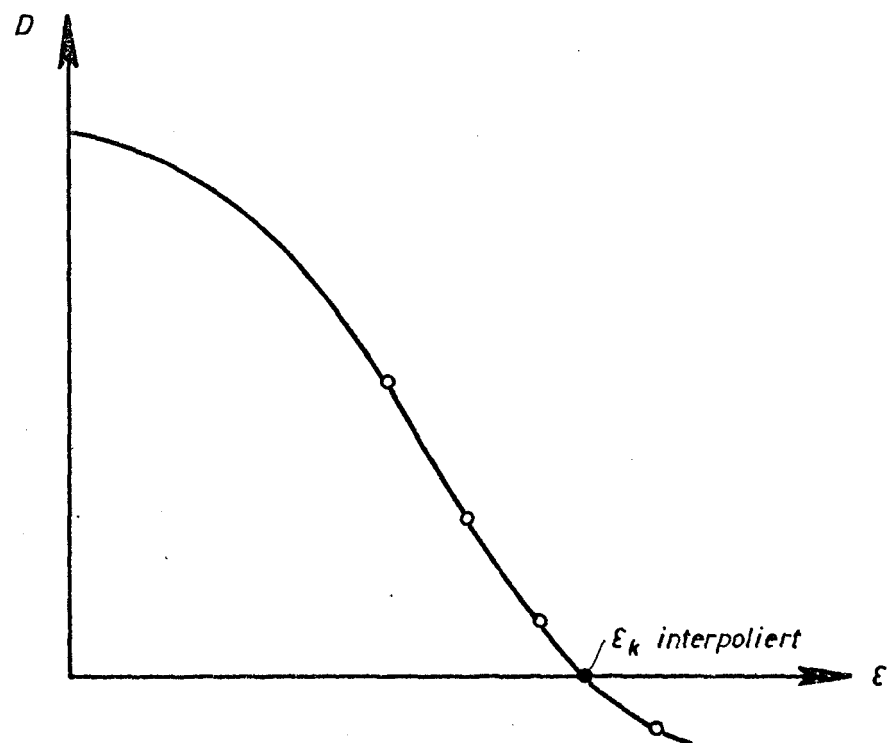


Bild 2 Numerische Lösung für Rahmenknicklasten

Verteilung der Stielsteifigkeiten entspricht der Lastverteilung

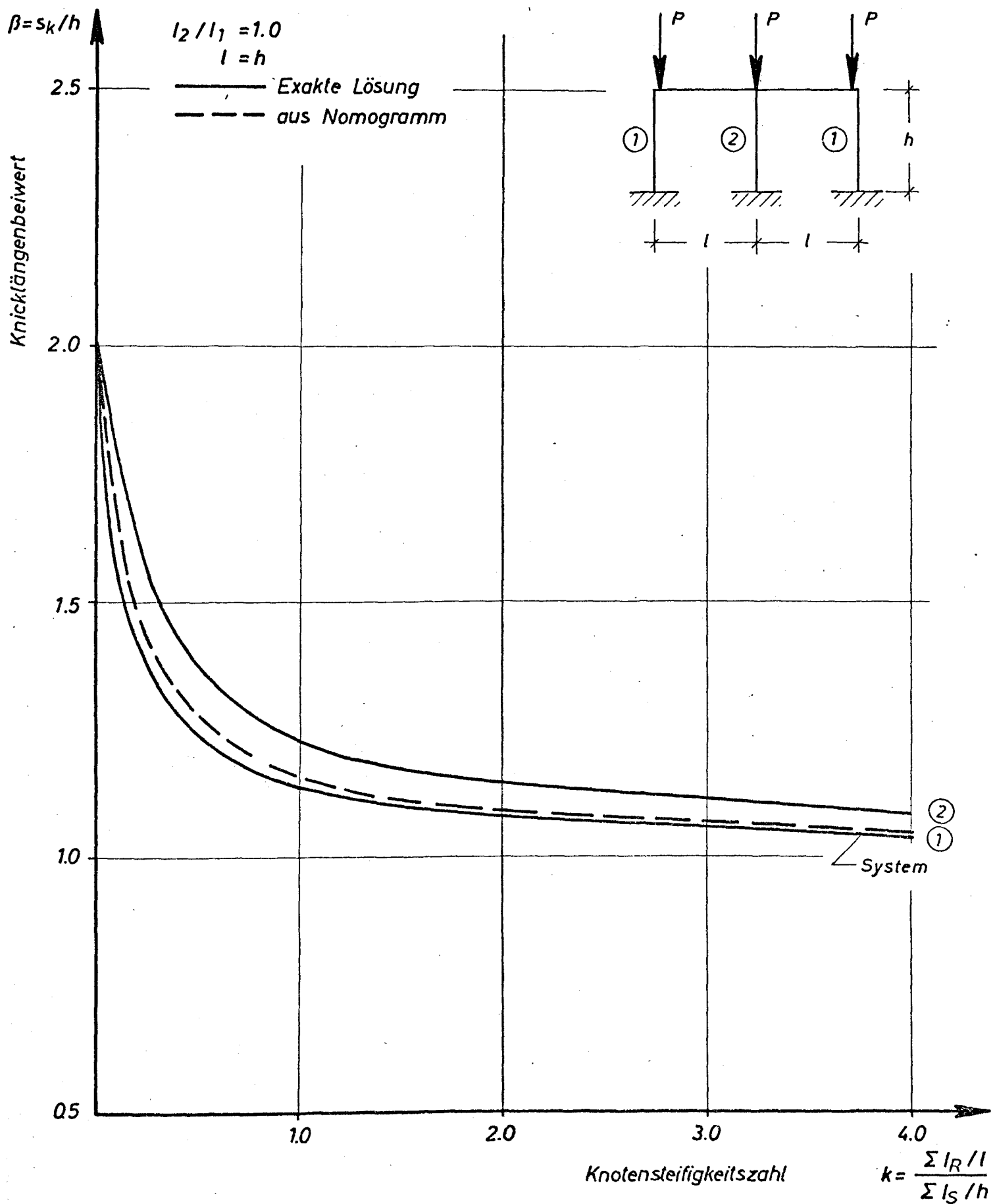


Bild 3a

Verteilung der Stielsteifigkeiten ungleich der Lastverteilung

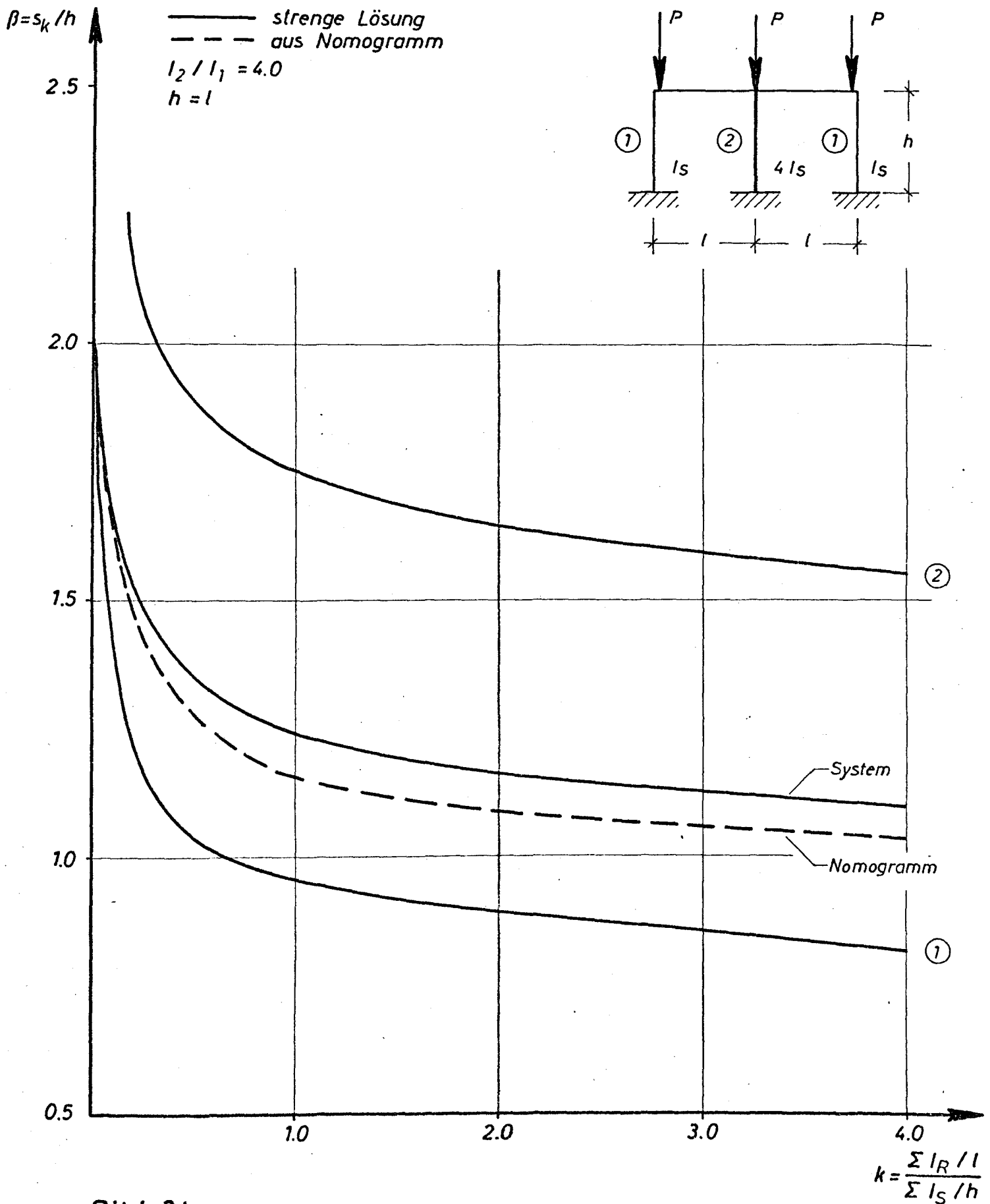


Bild 3b

Nomogramm führt zu „unsicheren“ Lösungen für Stiel 2

Lastverteilung = Stielsteifigkeitsverteilung

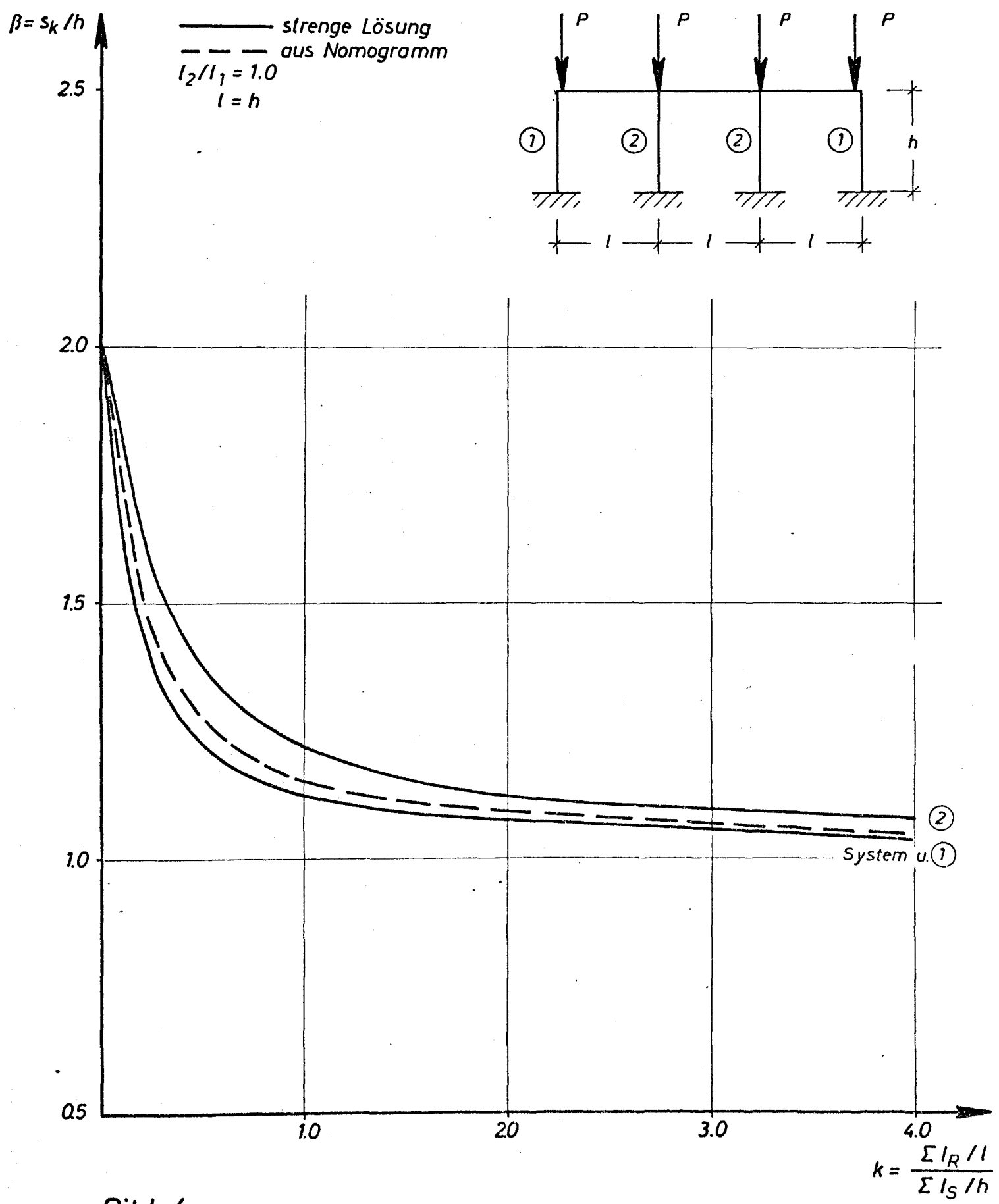


Bild 4a

Lastverteilung ≠ Stielsteifigkeitsverteilung

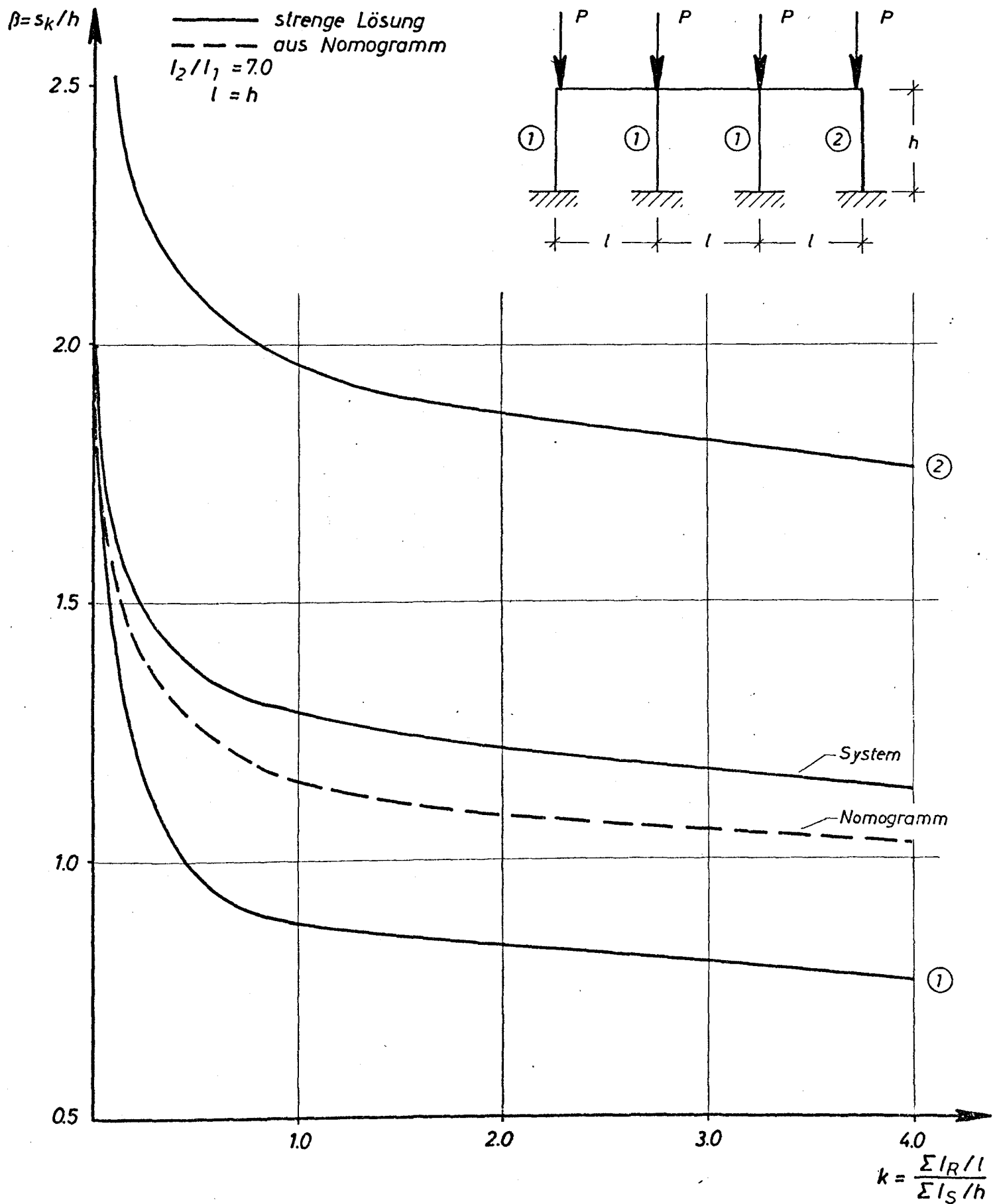


Bild 4b

Nomogramm führt zu „unsicheren“ Lösungen für Stiel 2

Symmetrische Lastverteilung , symmetrische Steifigkeitsverteilung hoher Lastschwerpunkt

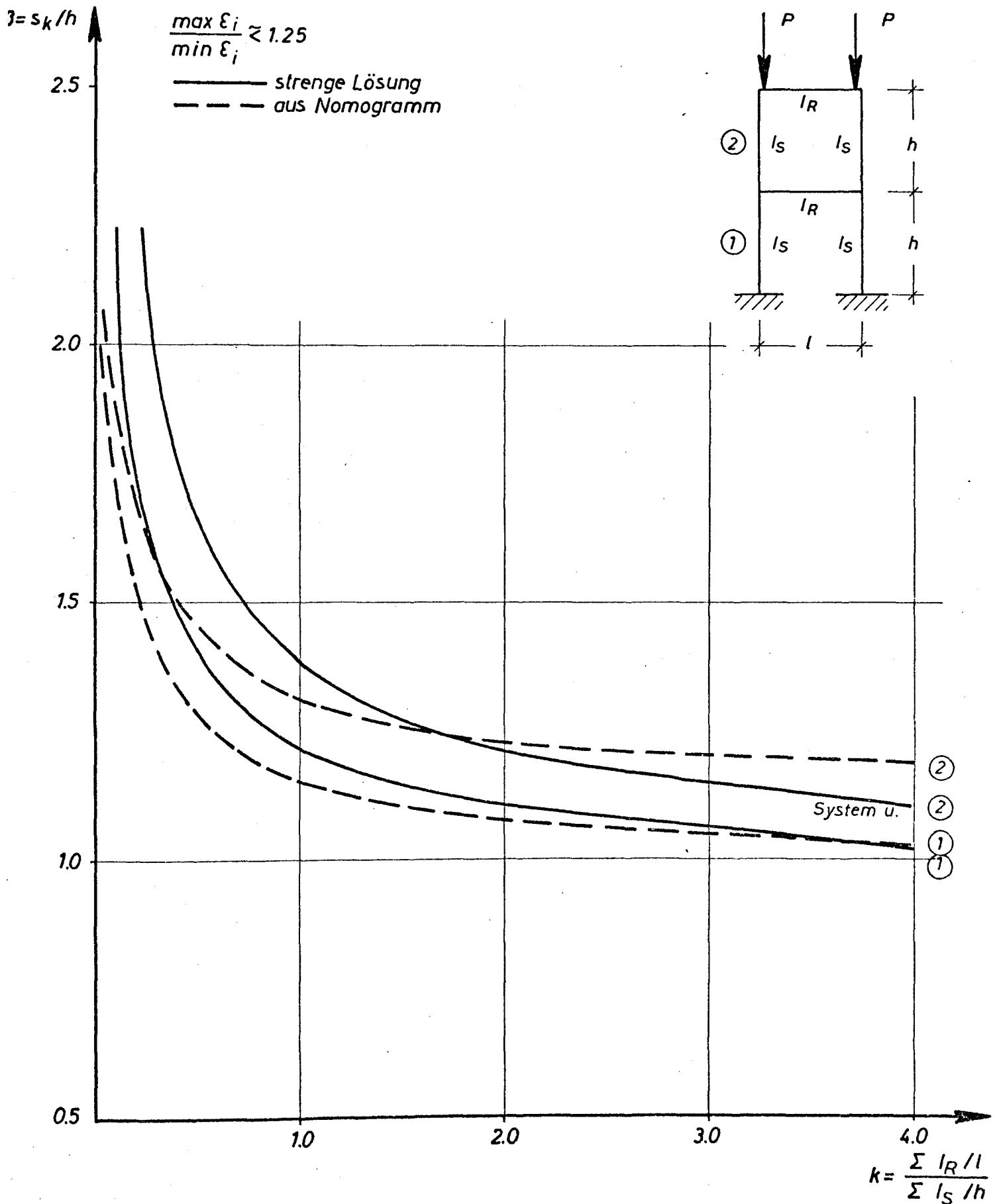


Bild 5a

Horizontal symmetrisch verteilte Lasten, vertikal geschößweise ansteigend; Stielsteifigkeiten konstant

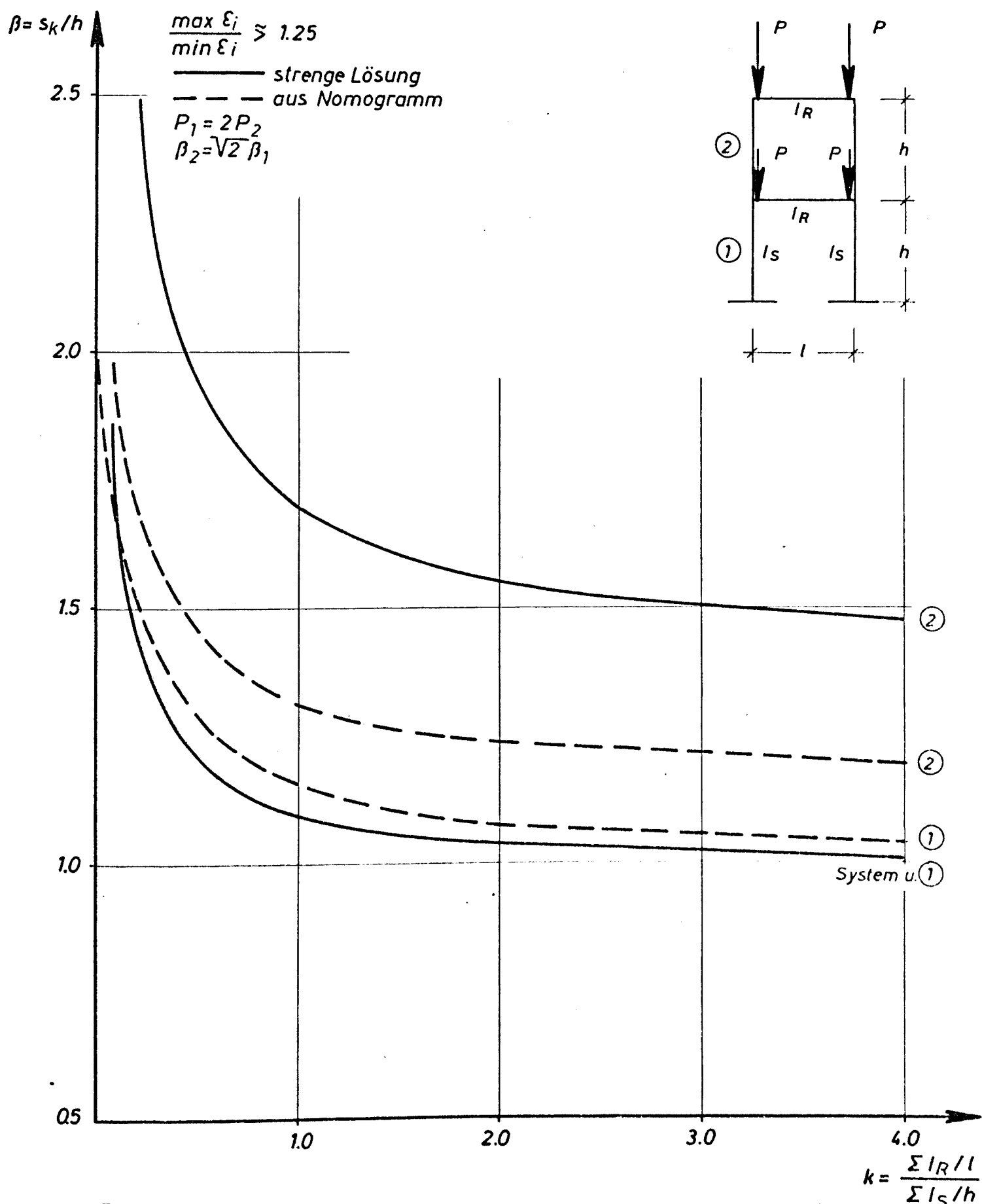


Bild 5b

Nomogramm führt zu „unsicheren“ Lösungen für Stiele „2“

Verteilung der Stielsteifigkeiten entspricht der Lastverteilung

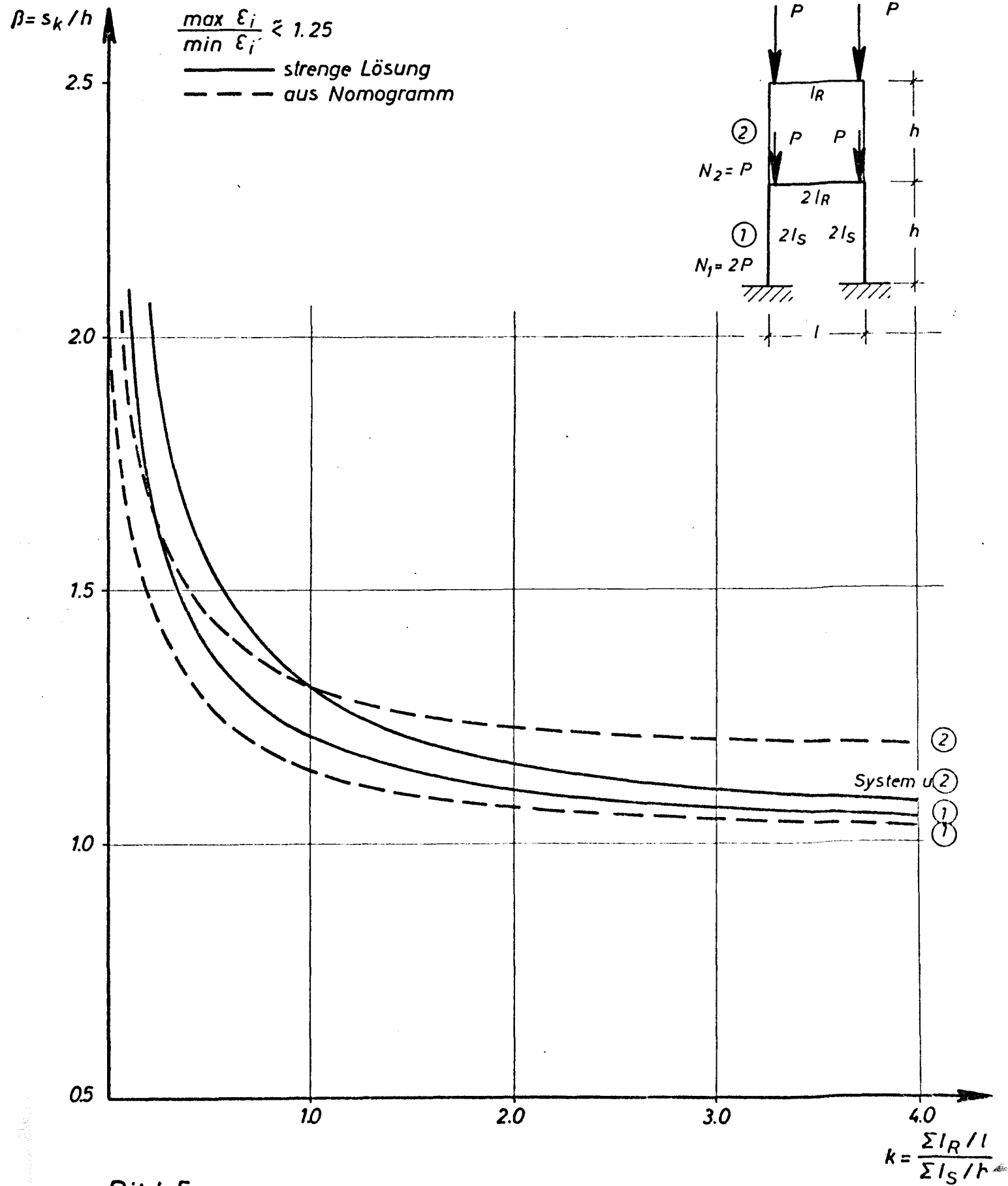


Bild 5c

Lasten geschoßweise ansteigend , Stielsteifigkeiten konstant

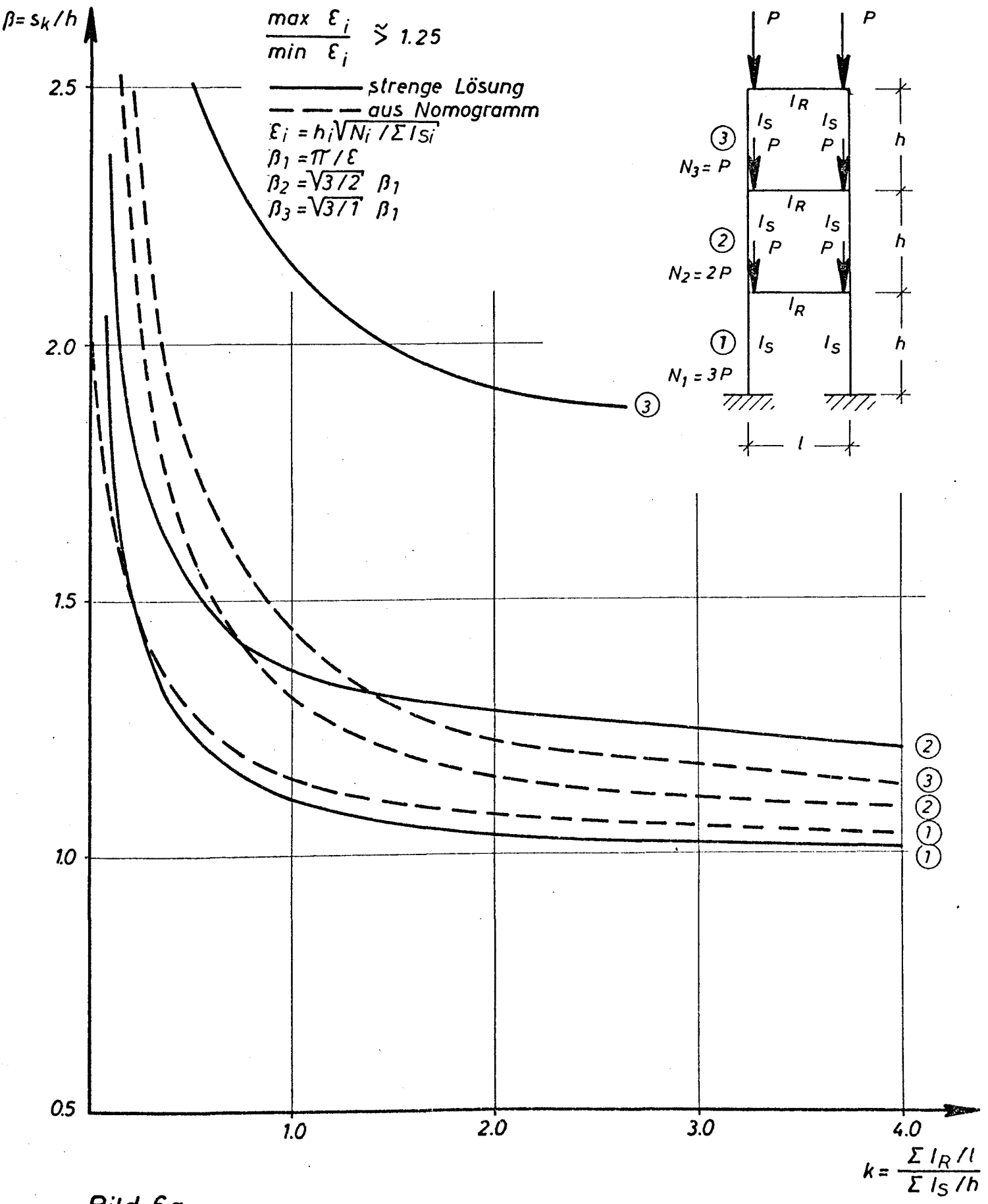


Bild 6a

Nomogramm führt zu „unsicheren“ Lösungen für Stiel 3

Rahmensystem und Lastverteilung wie Bild 6a, jedoch Stiele „rechts“ $I_S'/I_S = 4$

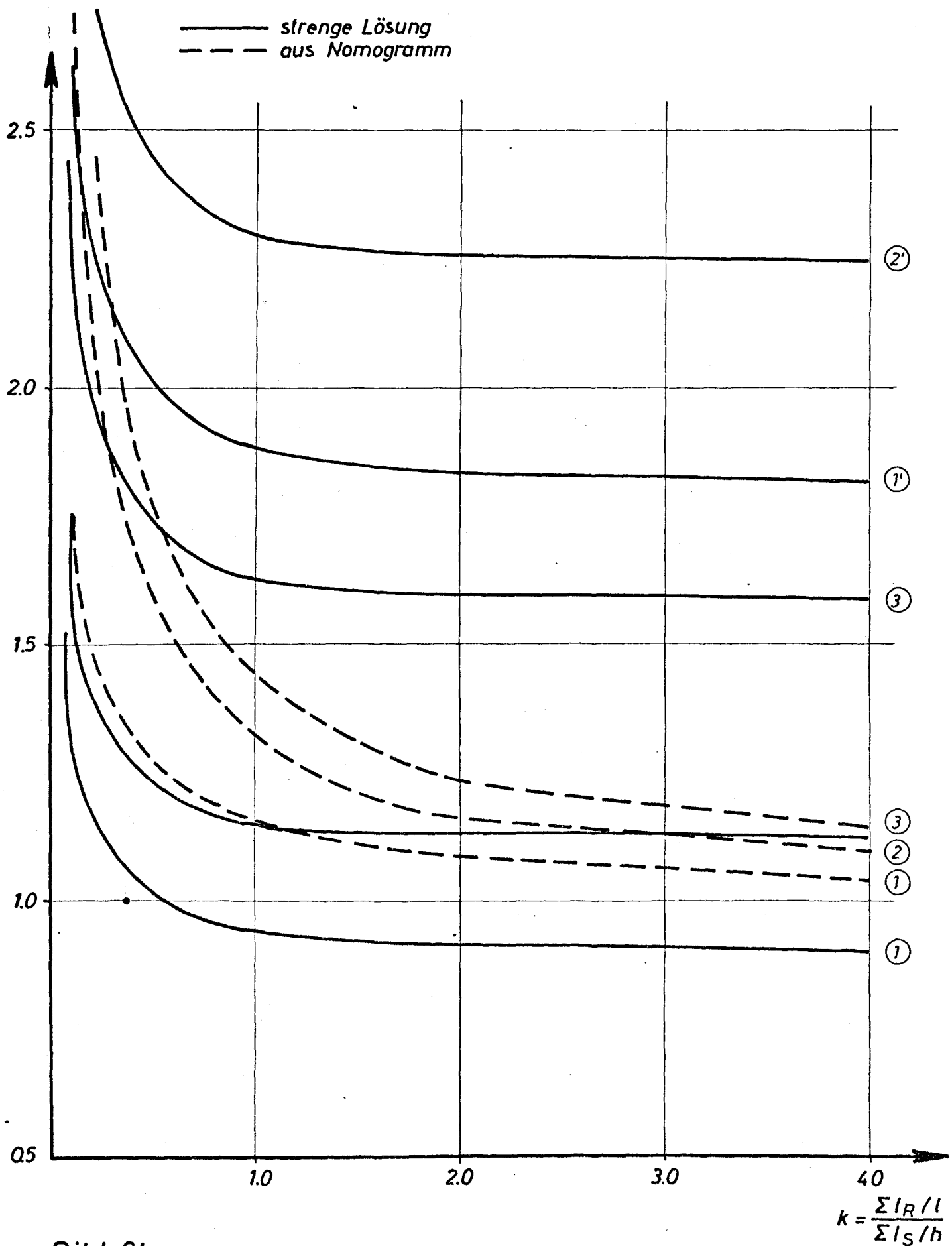


Bild 6b

Nomogramm führt zu „unsicheren“ Lösungen auf der rechten Seite

Systemknicklängen bezogen auf den untersten Stielquerschnitt Einfluß der Last bzw. Steifigkeitsverteilung

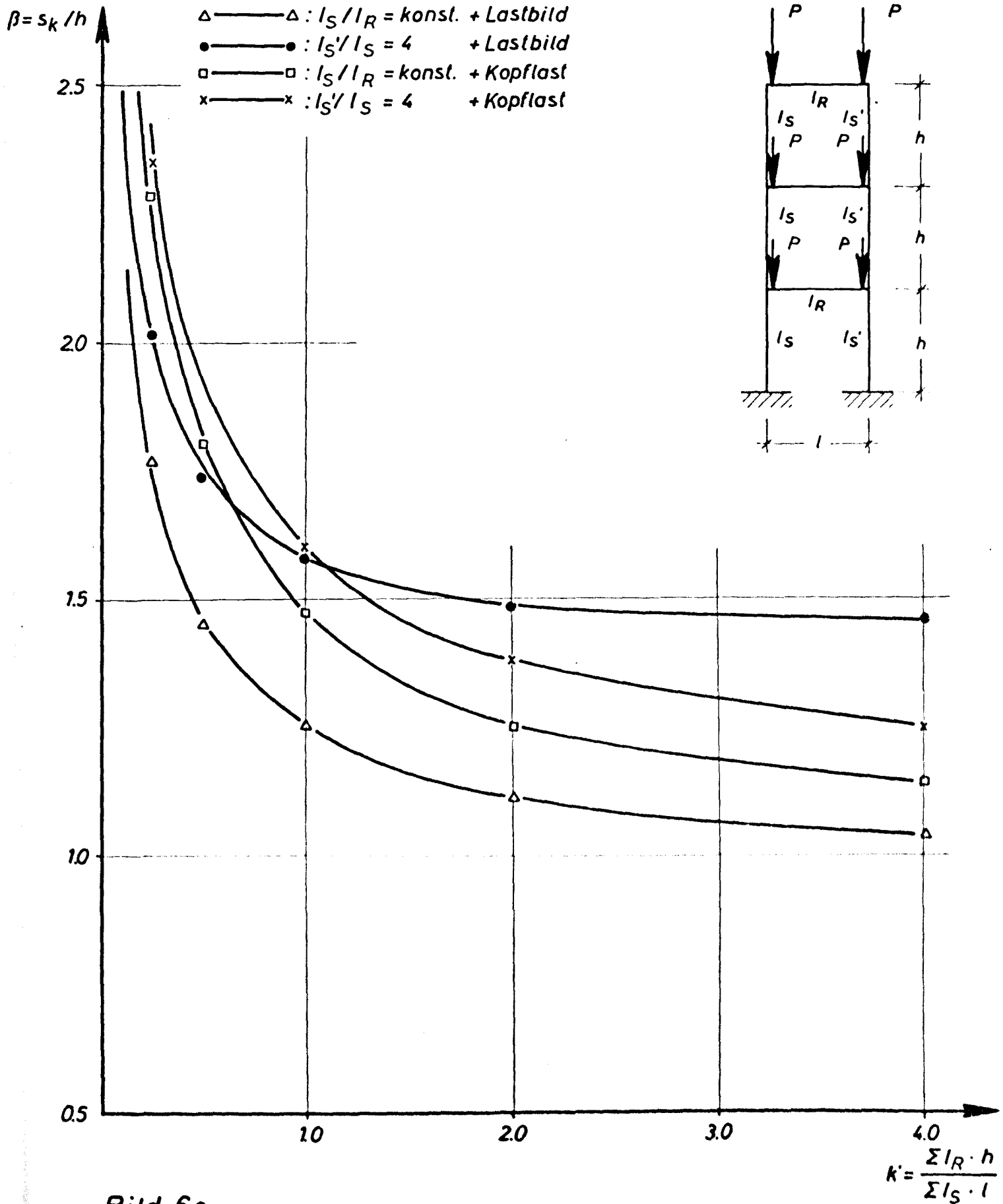


Bild 6c

Einfluß der Lastverteilung in vertikaler Richtung Systemknicklängen

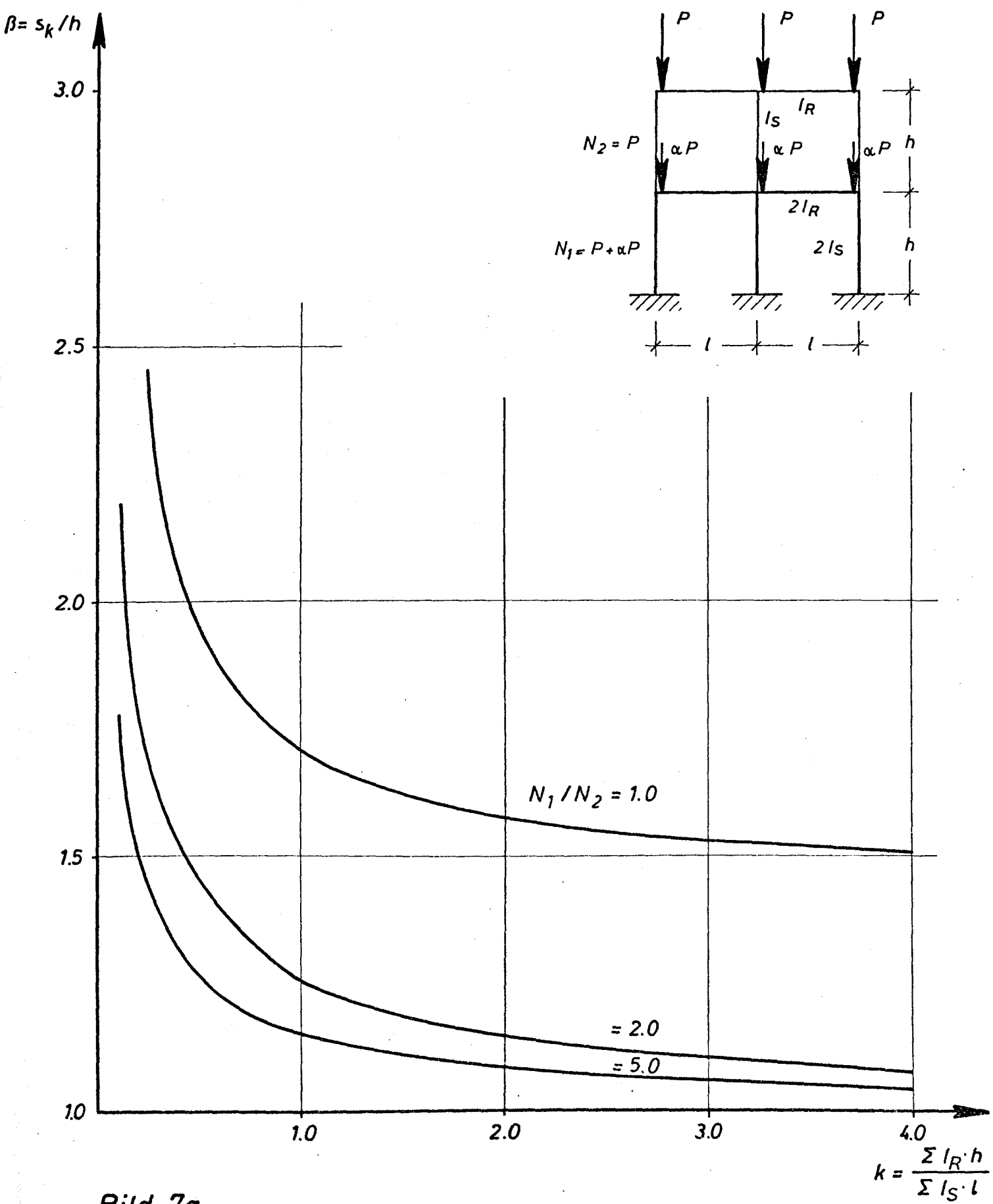
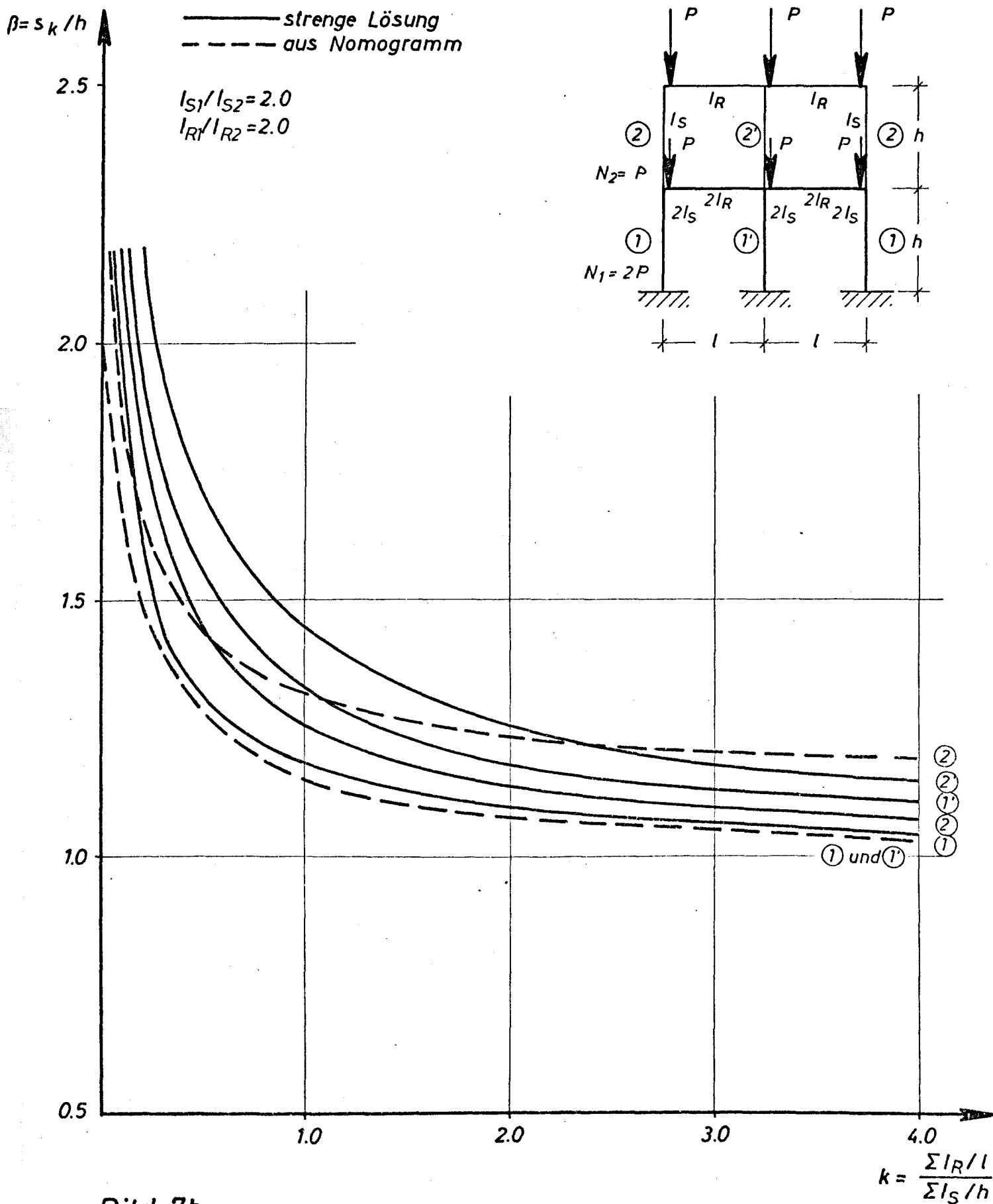


Bild 7a

Lastverteilung entspricht der Stielsteifigkeitsverteilung



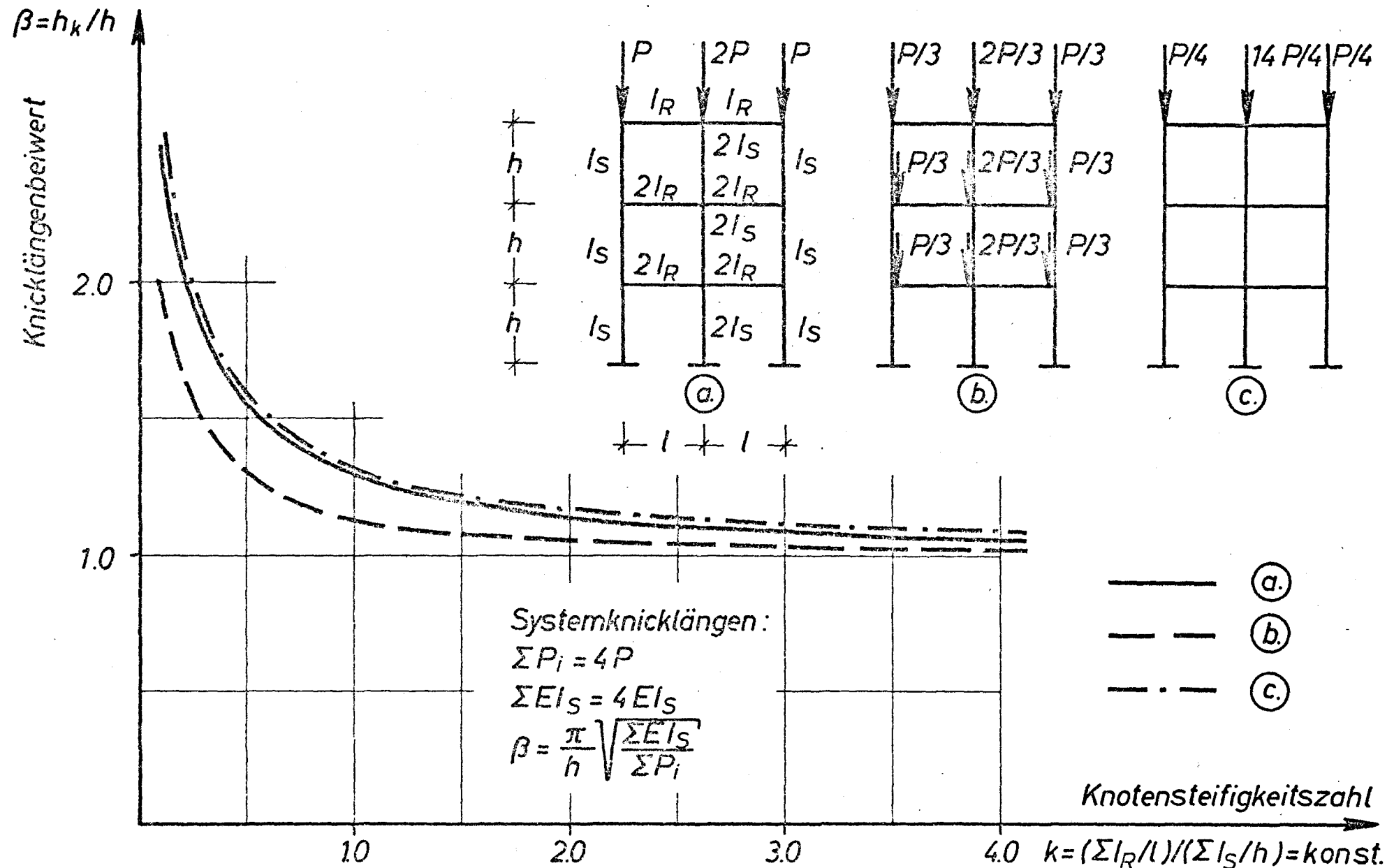


Bild 8 Ideal-elastische Systemknicklängen von Stockwerkrahmen.
Einfluß der Last- und Steifigkeitsverteilung

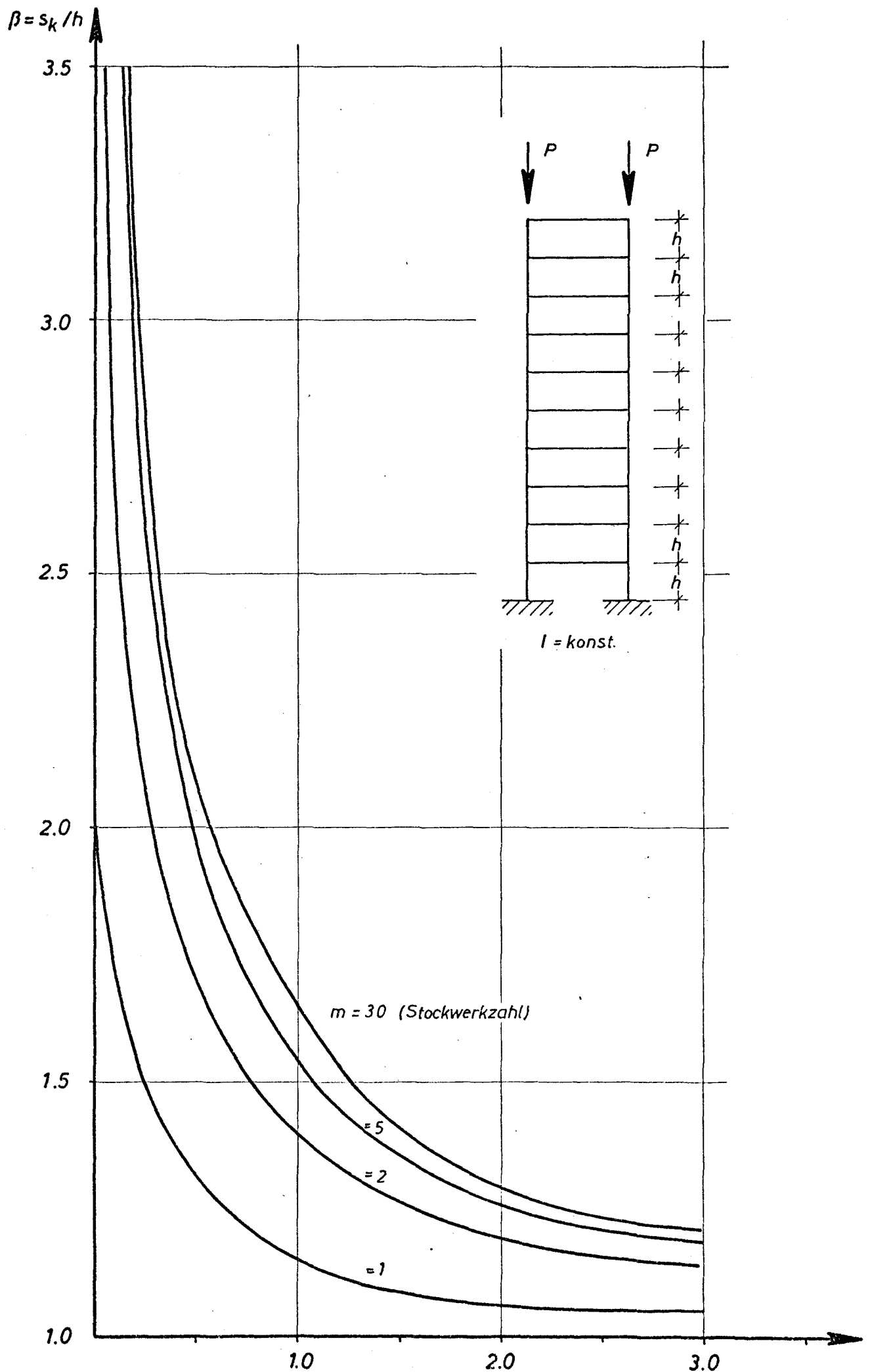


Bild 9 nach [5]

